DISA

Dipartimento di Informatica
e Studi Aziendali

2009/8

The pricing kernel and the Black-Scholes formula

Franco Molinari

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI TRENTO

DISA WORKING PAPER

DISA

Dipartimento di Informatica
e Studi Aziendali

2009/8

The pricing kernel and the Black-Scholes formula

Franco Molinari

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI TRENTO

DISA WORKING PAPER

Guidelines for authors
Papers may be written in English or Italian but authors should provide title, abstract, and keywords in both languages. Manuscripts should be submitted (in pdf format) by the corresponding author to the appropriate Associate Editor, who will ask a member of DISA for a short written review within two weeks. The revised version of the manuscript, together with the author's response to the reviewer, should again be sent to the Associate Editor for his consideration. Finally the Associate Editor sends all the material (original and final version, review and response, plus his own recommendation) to the Editor, who authorizes the publication and assigns it a serial number.

The Managing Editor and the Technical Officer ensure that all published papers are uploaded in the international RepEc public-action database. On the other hand, it is up to the corresponding author to make direct contact with the Departmental Secretary regarding the offprint order and the research fund which it should refer to.

Ricardo Alberto MARQUES PEREIRA
Dipartimento di Informatica e Studi Aziendali
Università degli Studi di Trento
Via Inama 5, TN 38122 Trento ITALIA
Tel +39-0461-282147 Fax +39-0461-282124
E-mail: ricalb.marper@unitn.it

THE PRICING KERNEL AND THE BLACK - SCHOLES FORMULA

Franco Molinari

ABSTRACT

This note provides an introduction to the pricing kernel methodology for financial derivatives. In order to illustrate the pricing kernel approach we apply it to the Black and Scholes model and obtain the famous Black and Scholes formula for the fair price of an European call option.

Keywords: pricing kernel approach, Black and Scholes model, call option formula

1. INTRODUZIONE

L'idea di pricing kernel o stochastic discount factor in mercati arbitrage-free è stata sviluppata principalmente da Harrison e Kreps [6] e Harrison e Pliska [7]. Si veda anche Ross[9], Cox e Ross[3], Delbaen e Schachermayer [4]. Nella letteratura finanziaria la nozione di pricing kernel si è rivelata un concetto estremamente fecondo, in particolare per il problema del pricing dei derivati ; tuttavia l'utilizzo della metodologia associata all'approccio del pricing kernel non risulta spesso di facile lettura (per una eccellente trattazione del concetto di pricing kernel si veda [2] , per una recente panoramica sull'argomento si veda ad esempio [5]).
Questa nota ha l'obiettivo di illustrare nel modo più semplice possibile il concetto e la metodologia del pricing kernel per il calcolo del prezzo di un derivato.
Allo scopo di illustrare tale metodologia si è considerato il modello base di Black e Scholes [1] e si è utilizzato l'approccio del pricing kernel per determinare il prezzo di una opzione call di tipo europeo, scritta su un sottostante che non distribuisce dividendi prima della scadenza dell'opzione. In questo modo si è ricavata la famosa formula di Black e Scholes attraverso una via che appare più semplice rispetto all'approccio classico per il pricing dei derivati che, come è noto, si fonda sulla possibilità di replicare il derivato attraverso un portafoglio autofinanziante.

2. IL PRICING KERNEL E IL MODELLO DI BLACK AND SCHOLES

Consideriamo il framework probabilistico standard per l'asset pricing theory, consideriamo cioè uno spazio di probabilità Ω equipaggiato con una misura di probabilità P (che rappresenta le views del mercato) e con una filtrazione $F = (F_t)_{t\geq 0}$ che descrive l'evoluzione delle informazioni del mercato al trascorrere del tempo.
L'ambiente in cui operiamo è quindi lo spazio descritto dalla terna (Ω, F, P).
Indichiamo con $(S_t)_{t\geq 0}$ il processo stocastico dei prezzi di un asset del mercato (il sottostante del contratto di opzione). Assumeremo che il sottostante non paghi dividendi prima della maturity T del derivato.

Introduciamo innanzitutto il concetto di pricing kernel. Il pricing kernel $(\phi_t)_{t\geq 0}$ è uno speciale processo stocastico tale che il processo $\phi_t S_t$ risulta essere una martingala. La relazione che lo caratterizza è infatti data da

$$\phi_t S_t = E\left[\phi_T S_T \mid F_t\right] \qquad \text{per ogni} \quad t \leq T \qquad (1)$$

dove $E[\cdot \mid F_t]$ denota il valore atteso condizionato rispetto alla σ-algebra F_t, che rappresenta l'informazione disponibile al tempo t.
Tale relazione deve valere per tutti gli asset del mercato che non pagano dividendi nell'intervallo temporale $[t,T]$.
Nel seguito, per semplificare le formule, indicheremo il valore atteso condizionato con la notazione semplificata $E_t[\cdot]$ anzichè $E[\cdot \mid F_t]$.
Si può dimostrare che l'esistenza di un pricing kernel è essenzialmente l'espressione del fatto che non esistono possibilità di arbitraggi nel mercato, cioè che si opera in un mercato arbitrage-free, mentre l'unicità del pricing kernel è legata al fatto che si opera in un mercato completo, dove cioè ogni derivato può essere replicato mediante un portafoglio autofinanziante (per la dimostrazione di tali importanti risultati si veda, ad esempio, [8]).
Consideriamo ora il modello di base di Black e Scholes. Come è noto in tale modello si considera un sottostante il cui prezzo S_t soddisfa l'equazione differenziale stocastica (nel seguito, eds) data da

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \qquad (2)$$

essendo $(W_t)_{t\geq 0}$ un moto Browniano standard . Le costanti μ e σ rappresentano la deriva e la volatilità del prezzo del sottostante. E' facile verificare che una soluzione della (2) è data da

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\} \qquad (3)$$

(processo noto come moto Browniano geometrico)

Ricordiamo infatti che se $f(t,x)$ è una funzione che ha la derivata prima continua rispetto a t e la derivata seconda continua rispetto a x e consideriamo il processo stocastico $S_t = f(t,W_t)$ allora , per il lemma di Ito , si ha che

$$dS_t = \left[f_t^{'}(t, W_t) + \frac{1}{2} f_{xx}^{"}(t, W_t) \right] dt + f_x^{'}(t, W_t) \, dW_t$$

Applicando quindi alla (3) il lemma di Ito otteniamo appunto la (2).

Sia ora r il tasso di interesse risk-free (composto nel continuo) che assumeremo costante nell'intervallo temporale $[0,T]$. Ciò significa che se B_0 rappresenta l'investimento iniziale nel bond privo di rischio , allora al tempo t il valore del bond sarà dato da $B_t = B_0 e^{rt}$.

Se indichiamo inoltre con $\lambda = (\mu - r)/\sigma$ il sovra rendimento del sottostante (rispetto al tasso risk-free) per unità di rischio, otterremo che $\mu = r + \sigma\lambda$.
Ricordiamo poi che una variabile aleatoria X ha una distribuzione di probabilità di tipo normale con media m e varianza v se e solo se risulta

$$E\left[\exp\{\alpha X\}\right] = \exp\left\{\alpha m + \frac{1}{2}\alpha^2 v\right\} \qquad (4)$$

Ricordiamo infine che, per definizione di moto Browniano standard, W_t è una variabile aleatoria con distribuzione normale di media 0 e varianza t .
Calcoliamo quindi il valore atteso di (3) . Utilizzando la (4) per la variabile aleatoria W_t si trova subito che

$$E[S_t] = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} E\left[\exp\{\sigma W_t\}\right] =$$

$$= S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} = S_0 \exp\{\mu t\} = S_0 \exp\{rt + \lambda\sigma t\} \qquad (5)$$

Utilizziamo ora il concetto di pricing kernel per il modello di Black e Scholes. Dato che ci troviamo nelle ipotesi di un mercato risk-free completo sappiamo che esiste un (unico) pricing kernel per il processo S_t .
Verificheremo ora che il pricing kernel per S_t è il processo stocastico definito da

$$\phi_t = \exp\left\{-\left(r + \frac{1}{2}\lambda^2\right)t - \lambda W_t\right\} \qquad (6)$$

Innanzitutto osserviamo che , essendo $W_0 = 0$, risulta $\phi_0 = 1$.
Osserviamo poi che, in base alla (4) , possiamo calcolare $E[\pi_t S_t]$ come segue:

$$
\begin{aligned}
E[\phi_t S_t] &= E\left[\exp\left\{-rt-\frac{1}{2}\lambda^2 t-\lambda W_t\right\} S_0 \exp\left\{(r+\lambda\sigma)t-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma W_t\right\}\right] \\
&= E\left[S_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma-\lambda)^2 t+(\sigma-\lambda)W_t\right\}\right] \\
&= S_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma-\lambda)^2 t\right\} E\left[\exp\{(\sigma-\lambda)W_t\}\right] \\
&= S_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma-\lambda)^2 t\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}(\sigma-\lambda)^2 t\right\} \\
&= S_0
\end{aligned}
$$

Possiamo dunque concludere che $E[\phi_t S_t]=\phi_0 S_0$.

Ricordiamo inoltre che , dato il moto Browniano standard W_t e data una costante α, il processo definito da

$$M_t = \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2 t+\alpha W_t\right\} \qquad (7)$$

è una martingala, vale cioè la relazione

$$M_t = E_t[M_T] \quad \text{per ogni} \quad t \le T \qquad (8)$$

Si ha infatti:

$$
\begin{aligned}
E_t[M_T] &= E_t\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2 T+\alpha W_T\right\}\right] \\
&= E_t\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2 (T-t)+\alpha(W_T-W_t)-\frac{1}{2}\alpha^2 t+\alpha W_t\right\}\right] \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2 t+\alpha W_t\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2 (T-t)\right\} E_t\left[\exp\{\alpha(W_T-W_t)\}\right]
\end{aligned}
$$

Osservando che la variabile aleatoria $\alpha(W_T-W_t)$ ha una distribuzione normale con media 0 e varianza $\alpha^2(T-t)$ e utilizzando la (4) otteniamo che il valore atteso che compare nell'ultima riga è eguale a $\exp\left\{\frac{1}{2}\alpha^2(T-t)\right\}$.

Possiamo quindi concludere che

$E_t[M_T] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2 t+\alpha W_t\right\} = M_t$ come volevasi dimostrare.

Siamo adesso in grado di verificare che vale la relazione (1) , cioè che il processo stocastico ϕ_t definito dalla (6) è il pricing kernel relativo al modello di Black e Scholes. Si ha infatti

$$E_t[\phi_T S_T] = S_0 E_t\left[\exp\left\{-rT - \frac{1}{2}\lambda^2 T - \lambda T\right\}\exp\left\{\left(r + \lambda\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right\}\right]$$
$$= S_0 E_t\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma-\lambda)^2 T + (\sigma-\lambda)W_T\right\}\right]$$

Come si può notare il processo che compare nella parentesi quadra, posto $\alpha = \sigma - \lambda$, è esattamente il processo che compare in (7) e quindi soddisfa la relazione (8). Segue dunque che

$$E_t[\phi_T S_T] = S_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma-\lambda)^2 t + (\sigma-\lambda)W_t\right\} = \phi_t S_t$$

come volevasi dimostrare.

E' interessante notare che, con una semplice applicazione del lemma di Ito, si verifica facilmente che l'espressione analitica (6) può essere letta come soluzione dell'equazione differenziale stocastica (eds) data da

$$\frac{d\phi_t}{\phi t} = -rdt - \lambda dW_t \qquad (9)$$

Daremo ora una semplice dimostrazione di come si possa ottenere l' eds (9) che descrive l'evoluzione del pricing kernel ϕ_t.
Facendo l'ipotesi che il pricing kernel sia governato da una eds del tipo

$$\frac{d\phi_t}{\phi_t} = adt + bdW_t \qquad (10)$$

dove a e b sono costanti, basta provare che $a = -r$ e che $b = -\lambda$.

Partendo dalla definizione di pricing kernel (1) si ha che

$$\phi_t S_t = E_t[\phi_{t+dt} S_{t+dt}] = E_t\left[(\phi_t + d\phi_t)(S_t + dS_t)\right] = E_t[\phi_t S_t + \phi_t dS_t + S_t d\phi_t + dS_t d\phi_t]$$

Ne segue che $E_t\left[\phi_t dS_t + S_t d\phi_t + dS_t d\phi_t\right] = 0$ e quindi che

$$E_t\left[\frac{dS_t}{S_t} + \frac{d\phi_t}{\phi_t} + \frac{d\phi_t}{\phi_t}\frac{dS_t}{S_t}\right] = 0 \quad (11)$$

Ora, poiché investendo 1 nel titolo risk-free al tempo t, si ottiene $1 + rdt$ al tempo $t + dt$, per la proprietà (1) del pricing kernel applicata al titolo risk-free deve risultare che

$\phi_t \cdot 1 = E_t\left[\phi_{t+dt} \cdot (1 + rdt)\right]$ da cui segue che $\phi_t = E_t\left[(\phi_t + d\phi_t)(1 + rdt)\right]$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a dt si ha dunque che

$\phi_t = E_t\left[\phi_t + \phi_t rdt + d\phi_t\right]$ da cui segue che $0 = E_t\left[\phi_t rdt + d\phi_t\right]$ e quindi

$E_t\left[\frac{d\phi_t}{\phi_t}\right] = -rdt$. Applicando tale condizione alla (10) otteniamo $a = -r$.

Segue dunque che l'eds (10) si può riscrivere come segue:

$$\frac{d\phi_t}{\phi_t} = -rdt + bdW_t \quad (12)$$

Rimane da dimostrare che $b = -\lambda$. Ricordiamo che, per la (2) , si ha

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (13)$$

Sostituiamo allora la (12) e la (13) nella (11) . Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a dt otteniamo che

$E_t\left[(\mu - r + b\sigma)dt + (\sigma + b)dW_t\right] = 0$ da cui segue che $\mu - r + b\sigma = 0$ e cioè che

$b = -\frac{\mu - r}{\sigma} = -\lambda$. Ciò significa che l'evoluzione del pricing kernel è governata dalla eds data dalla (9), come volevasi dimostrare.

3. VALUTAZIONE DI UNA DIGITAL OPTION MEDIANTE IL PRICING KERNEL

Prima di affrontare il problema del pricing di una opzione call mediante il pricing kernel nell'ambito del modello di Black e Scholes è opportuno , per semplicità espositiva, affrontare quello del pricing di una opzione call di tipo binario.
Come è noto, una opzione call di tipo binario , con strike K, paga 1 se il valore del sottostante a scadenza supera K, altrimenti non paga nulla. Per semplicità di scrittura utilizzeremo la funzione indicatrice dell'evento A, indicata con $\mathrm{I}(A)$ **,** che vale 1 se l'evento A si verifica e vale 0 altrimenti. Adottando questa notazione , il payoff di una call digitale è quindi dato da

$$H_T = \mathrm{I}\{S_T \geq K\}$$

Ricordando la proprietà che caratterizza il pricing kernel e il fatto che $\phi_0 = 1$, si ottiene che il valore attuale di una opzione call digitale è dato da

$$H_0 = E[\phi_T H_T] = E[\phi_T \mathrm{I}\{S_T \geq K\}] = e^{-rT} E\left[\exp\left\{-\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\right\}\mathrm{I}\{S_T \geq K\}\right] \qquad (14)$$

Ricordiamo che $\quad S_T = S_0 \exp\left\{(r+\lambda\sigma)T + \sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\}$

Quindi risulta $S_T \geq K$ se e solo se $\quad \log S_0 e^{rT} + \sigma(W_T + \lambda T) - \frac{1}{2}\sigma^2 T \geq \log K$

cioè

$$W_T + \lambda T \geq -\left[\log\left(S_0 e^{rT}/K\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right]/\sigma$$

vale a dire

$$\frac{W_T}{\sqrt{T}} + \lambda\sqrt{T} \geq -\left[\log\left(S_0 e^{rT}/K\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right]/\sigma\sqrt{T}$$

In conclusione, posto $d_2 = \left[\log\left(S_0 e^{rT} / K\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T \right] / \sigma\sqrt{T}$, si ha che

$S_T \geq K$ se e solo se $\frac{W_T}{\sqrt{T}} + \lambda\sqrt{T} \geq -d_2$

Osserviamo ora che , in base alla definizione di W_T , la variabile aleatoria definita da $X = W_T / \sqrt{T}$ ha una distribuzione di probabilità normale standardizzata (media 0 e varianza 1). Possiamo dunque calcolare il valore atteso che compare nella (14) come segue:

$$E\left[\exp\left\{ -\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T \right\} \mathrm{I}\left\{ S_T \geq K \right\} \right] = E\left[\exp\left\{ -\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T \right\} \mathrm{I}\left\{ \frac{W_T}{\sqrt{T}} + \lambda\sqrt{T} \geq -d_2 \right\} \right]$$
$$= E\left[\exp\left\{ -\lambda\sqrt{T}X - \frac{1}{2}\lambda^2 T \right\} \cdot \mathrm{I}\left\{ X + \lambda\sqrt{T} \geq -d_2 \right\} \right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\lambda\sqrt{T}x - \frac{1}{2}\lambda^2 T \right\} \cdot \mathrm{I}\left\{ x + \lambda\sqrt{T} \geq -d_2 \right\} \exp\left\{ -\frac{1}{2}x^2 \right\} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(x + \lambda\sqrt{T} \right)^2 \right\} \cdot \mathrm{I}\left\{ x + \lambda\sqrt{T} \geq -d_2 \right\} dx$$

Ora, posto $y = x + \lambda\sqrt{T}$, l'ultimo integrale si può valutare come segue:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2}y^2 \right\} \cdot \mathrm{I}\left\{ y \geq -d_2 \right\} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2}y^2 \right\} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} \exp\left\{ -\frac{1}{2}y^2 \right\} dy = N\left(d_2\right)$$

avendo indicato con $N(\cdot)$ la funzione di ripartizione della normale standardizzata.

In conclusione, dalla (14) otteniamo che il valore attuale di una opzione call digitale con payoff $H_T = \mathrm{I}\left\{ S_T \geq K \right\}$ è dato da

$$H_0 = e^{-rT} N\left(d_2\right) \qquad \text{essendo} \quad d_2 = \left[\log\left(S_0 e^{rT} / K\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T \right] / \sigma\sqrt{T} \qquad (15)$$

Possiamo notare che nella formula di valutazione non compare il parametro λ mentre compare invece il parametro σ, il che significa che non importa quale sia la nostra "view" sulla performance del sottostante, ciò che conta è la sua volatilità.

4. VALUTAZIONE DI UNA CALL OPTION MEDIANTE IL PRICING KERNEL

Come si è detto nell'introduzione, il nostro scopo è quello di valutare , mediante il pricing kernel, il valore attuale di una opzione call di tipo europeo scritta su un sottostante che non distribuisce dividendi entro la scadenza dell'opzione. Come è noto , il payoff dell'opzione è rappresentato da

$H_T = \max\{S_T - K; 0\}$ dove K è il prezzo di esercizio previsto nel contratto.

Il valore attuale dell'opzione, in base alla caratterizzazione del pricing kernel , sarà dunque dato da

$$
\begin{aligned}
H_0 &= E[\phi_T H_T] = E\left[\phi_T \max\{S_T - K; 0\}\right] = E\left[\phi_T (S_T - K) \cdot \mathrm{I}\{S_T \geq K\}\right] \\
&= E\left[\phi_T S_T \cdot \mathrm{I}\{S_T \geq K\}\right] - K \cdot E\left[\phi_T \cdot \mathrm{I}\{S_T \geq K\}\right]
\end{aligned}
$$

Notiamo che il secondo valore atteso non è altro che il valore attuale di una call digitale che è stato valutato nel paragrafo precedente ed è eguale a $e^{-rT} N(d_2)$.
Non ci resta dunque che valutare il primo valore atteso. Si ha:

$$
\begin{aligned}
&E\left[\phi_T S_T \cdot \mathrm{I}\{S_T \geq K\}\right] = S_0 E\left[\exp\left\{(\sigma - \lambda) W_T - \frac{1}{2}(\sigma - \lambda)^2 T\right\} \cdot \mathrm{I}\{S_T \geq K\}\right] \\
&= S_0 E\left[\exp\left\{(\sigma - \lambda) W_T - \frac{1}{2}(\sigma - \lambda)^2 T\right\} \cdot \mathrm{I}\left\{\frac{W_T}{\sqrt{T}} + \lambda\sqrt{T} \geq -d_2\right\}\right]
\end{aligned}
$$

Ricordiamo ora che la variabile aleatoria definita da $X = W_T / \sqrt{T}$ ha una distribuzione di probabilità normale standardizzata. Possiamo quindi proseguire il calcolo come segue:

$$
\begin{aligned}
&= S_0\, E\left[\exp\left\{(\sigma-\lambda)\, X\sqrt{T} - \frac{1}{2}(\sigma-\lambda)^2\, T\right\}\cdot \mathrm{I}\left\{X + \lambda\sqrt{T} \geq -d_2\right\}\right] \\
&= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{(\sigma-\lambda)\, x\sqrt{T} - \frac{1}{2}(\sigma-\lambda)^2\, T\right\}\cdot \mathrm{I}\left\{x + \lambda\sqrt{T} \geq -d_2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\} dx \\
&= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x-(\sigma-\lambda)\sqrt{T}\right)^2\right\}\cdot \mathrm{I}\left\{x + \lambda\sqrt{T} - \sigma\sqrt{T} \geq -d_2 - \sigma\sqrt{T}\right\} dx \\
&= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x-(\sigma-\lambda)\sqrt{T}\right)^2\right\}\cdot \mathrm{I}\left\{x-(\sigma-\lambda)\sqrt{T} \geq -d_1\right\} dx
\end{aligned}
$$

dove $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T} = \left[\log\left(S_0 e^{rT} / K\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right] / \sigma\sqrt{T}$.

Ponendo infine $y = x - (\sigma-\lambda)\sqrt{T}$ si ha

$$
\begin{aligned}
&= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}\{y \geq -d_1\} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy = S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy \\
&= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy = S_0 \cdot N\left(d_1\right)
\end{aligned}
$$

Come si vede, utilizzando l’approccio del pricing kernel, abbiamo potuto determinare il valore attuale dell’opzione dato da

$$
H_0 = S_0 N\left(d_1\right) - e^{-rT} K \cdot N\left(d_2\right)
$$

che rappresenta appunto la celeberrima formula di Black e Scholes.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Black, M. Scholes (1973)
" The Pricing of Options and Corporate Liabilities "
Journal of Political Economy, 81, 637-659

[2] J.H.Cochrane (2001)
Asset Pricing
Princeton University Press

[3] J. Cox, S.A. Ross (1976)
" The Valuation of Options for Alternatives Stochastic Processes "
Journal of Financial Economics, 3, 145-166

[4] F. Delbaen, W. Schachermayer (1994)
" A general version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing "
Mathematische Annalen, 300, 463-520

[5] B.Düring B, E. Lüders (2005)
"Option prices under generalized pricing kernels"
Review of Derivatives Research, 8 (2), 97-123

[6] J. M. Harrison, D.M. Kreps (1979)
" Martingale and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets "
*Journal of Economic Theory,*20, 381-408

[7] J. M. Harrison, S.R. Pliska (1981)
" Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading"
Stochastic Processes and their Applications, 11, 215-260

[8] P.J. Hunt, J.E. Kennedy (2000)
Financial Derivatives in Theory and Practice
Wiley Series in Probability and Statistics

[9] S.A. Ross (1976)
" Options and Efficiency"
Quarterly Journal of Economics, 90, 75-89